Применение математического аппарата линейного программирования с переменными коэффициентами к решению матричных игр

Solving Matrix Games by Reducing to a Linear Programming Problem with Variable Coefficients (DOI: 10.34773/EU.2021.2.24)

И. КОЩЕГУЛОВА, М. СТРЕЛЬЦОВ

Кощегулова Ильмира Рустамовна, д-р экон. наук, доцент, заведующий кафедрой финансов и экономического анализа Уфимского государственного авиационного технического университета. E-mail: ilma2001@mail.ru
Стрельцов Максим Александрович, канд. экон. наук, доцент кафедры финансов и экономического анализа Уфимского государственного авиационного технического университета. E-mail: maxim-ugatu@yandex.ru

В статье рассматривается решение матричных игр с матрицами, содержащими переменные выигрыши.
***Ключевые слова**: матричные игры, матрица выигрышей, задача линейного программирования.*
The article deals with the solution of matrix games with matrices containing variable wins.
***Key words**: matrix games, payoff matrix, linear programming problem.*

В условиях рыночной экономики очень часто возникают ситуации, когда экономическая эффективность одних участников рынка зависит от решений, принимаемых другими участниками. Такие ситуации принято называть конфликтными и моделировать их с помощью математического аппарата теории игр.

В данной статье будет рассмотрен вопрос, касающийся такого класса игр как матричные игры, а именно, вопрос расширения постановки задачи поиска решения игры путем использования матрицы выигрышей с переменными элементами.

Матричной игрой называется конечная игра двух лиц с нулевой суммой. Содержательно матричная игра происходит следующим образом: оба игрока одновременно выбирают свои стратегии, после чего происходит распределение выигрышей согласно правилам игры. Выигрыши игроков удобно представить в виде матрицы выигрышей $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, у которой строки соответствуют стратегиям игрока 1, столбцы – стратегиям игрока 2, а элементы матрицы – выигрышам игроков.

$$\begin{array}{cc} & \text{игрок 2} \\ \text{игрок 1} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \qquad (1),$$

На сегодняшний день известно множество способов решения матричных игр. Однако практически во всех научных трудах предполагается, что элементы матрицы выигрышей являются постоянными [1]. В условиях же реальной экономики элементы матрицы выигрышей зачастую находятся в рамках тех или иных интервалов. Это обусловлено тем, что расчет того или иного экономического параметра практически никогда невозможно осуществить точно, т.к. рынок подвержен изменениям. Поэтому в общем случае целесообразно решать матричную игру в условиях возможности изменения элементов матрицы выигрышей.

Самым универсальным способом решения матричной игры является метод сведения решения игры к задаче линейного программирования [6]. Методология и алгоритмы решения таких задач разработаны достаточно давно, и получили свое развитие в работах А.П. Мартынова, Е.А. Салимоненко, Д.А. Салимоненко и ряда других исследователей [3, 4, 5].

Методология решения задач линейного программирования с переменными коэффициентами позволяет решать матричные игры с переменными матрицами выигрышей путем дополнения стандартной задачи новыми ограничениями следующего вида:

$$a_{ij}^{-} \le a_{ij} \le a_{ij}^{+} \tag{2}$$,

где a_{ij}^{-}, a_{ij}^{+} – нижняя и верхняя границы изменений a_{ij}.

Эта методология расширяет возможности теории игр применительно к решению матричных игр.

Для демонстрации возможностей рассмотрим игру вида [1]:

$$\begin{array}{cc} & \text{игрок 2} \\ \text{игрок 1} & \begin{pmatrix} 0,0028 & 0,0018 & 0,0014 \\ 0,0015 & 0,0022 & 0,0021 \\ 0,001 & 0,0016 & 0,0024 \end{pmatrix} \end{array} \tag{3}$$

Нижняя $(\underline{v})$ и верхняя $(\overline{v})$ значения игры составляют:

$$\underline{v} = \max_i \left\{ \min_j a_{ij} \right\} = \max_{i \in A} \{0,0014;\ 0,0015;\ 0,001\} = 0,0015$$

$$\overline{v} = \min_j \left\{ \max_i a_{ij} \right\} = \min_j \{0,0028;\ 0,0022;\ 0,0024\} = 0,0022,$$

что означает отсутствие решения игры в чистых стратегиях, а также то, что при любой ситуации гарантированный выигрыш игроков будет располагаться в диапазоне от $0,0015$ до $0,0022$.

Найдем решение игры в смешанных стратегиях. Это можно сделать, сведя игру к задаче линейного программирования. Применительно к матрице (3) задачи линейного программирования будет иметь вид [1]:

$$F = q_1 + q_2 + q_3 \to max$$

$$\begin{cases} 0,0028q_1 + 0,0018q_2 + 0,0014q_3 \le 1 \\ 0,0015q_1 + 0,0022q_2 + 0,0021q_3 \le 1 \\ 0,001q_1 + 0,0016q_2 + 0,0024q_3 \le 1 \end{cases} \tag{4}$$

$$\text{при } q_1 \ge 0,\ q_2 \ge 0,\ q_3 \ge 0$$

и

$$Z = p_1 + p_2 + p_3 \to min$$

$$\begin{cases} 0,0028p_1 + 0,0015p_2 + 0,0014p_3 \ge 1 \\ 0,0018p_1 + 0,0022p_2 + 0,0016p_3 \ge 1 \\ 0,0014p_1 + 0,0021p_2 + 0,0024p_3 \ge 1 \end{cases} \tag{5}$$

$$\text{при } p_1 \ge 0,\ p_2 \ge 0,\ p_3 \ge 0.$$

То есть задачи обоих игроков свелись к паре двойственных задач линейного программирования. В итоге получаются следующие результаты: $q_1 = 182,7$, $q_2 = 13,5$, $q_3 = 331,5$; $p_1 = 209,7$, $p_2 = 189,4$, $p_3 = 128,5$; $F_{max} = Z_{min} = 527,7$. При этом средний выигрыш игроков составит: $V = 1/527,7 = 0,0019$.

Теперь рассмотрим ту же матричную игру, но с переменной матрицей выигрышей. Для простоты расчетов положим не все, а только некоторые выигрыши переменными:

$$\begin{array}{cc} & \text{игрок 2} \\ \text{игрок 1} & \begin{pmatrix} 0,0028 \pm 0,002 & 0,0018 \pm 0,0012 & 0,0014 \pm 0,001 \\ 0,0015 \pm 0,0011 & 0,0022 & 0,0021 \\ 0,001 & 0,0016 & 0,0024 \end{pmatrix} \end{array} \quad (6)$$

Нижняя $(\underline{v})$ и верхняя $(\overline{v})$ значения игры составляют:

$$\underline{v} = \max_i \left\{ \min_j a_{ij} \right\} = \max_{i \in A} \left\{ 0,0008;\ 0,0004;\ 0,001 \right\} = 0,0004$$

$$\overline{v} = \min_j \left\{ \max_i a_{ij} \right\} = \min_j \left\{ 0,0048;\ 0,0026;\ 0,0024 \right\} = 0,0048$$

Как и ранее, игра не имеет решения игры в чистых стратегиях, но при этом диапазон гарантированного выигрыша расширился. При любой ситуации гарантированный выигрыш игроков будет располагаться в диапазоне от $0,0004$ до $0,0048$, а у игрока 2 – проигрыш в том же диапазоне.

Найдем решение игры в смешанных стратегиях. В этом случае задача линейного программирования будет иметь вид:

$$F = q_1 + q_2 + q_3 \to max$$

$$\begin{cases} 0,0028q_1 + 0,0018q_2 + 0,0014q_3 \le 1 \\ 0,0015q_1 + 0,0022q_2 + 0,0021q_3 \le 1 \\ 0,001q_1 + 0,0016q_2 + 0,0024q_3 \le 1 \end{cases} \quad (7)$$

при

$$q_1 \ge 0,\ q_2 \ge 0,\ q_3 \ge 0$$

$$0,0008 \le a_{11} \le 0,0048$$

$$0,0006 \le a_{12} \le 0,0030$$

$$0,0004 \le a_{13} \le 0,0024$$

$$0,0004 \le a_{21} \le 00,0025$$

и

$$Z = p_1 + p_2 + p_3 \to min$$

$$\begin{cases} 0,0028p_1 + 0,0015p_2 + 0,0014p_3 \ge 1 \\ 0,0018p_1 + 0,0022p_2 + 0,0016p_3 \ge 1 \\ 0,0014p_1 + 0,0021p_2 + 0,0024p_3 \ge 1 \end{cases} \quad (8)$$

при

$$p_1 \ge 0,\ p_2 \ge 0,\ p_3 \ge 0$$

$$0,0008 \le a_{11} \le 0,0048$$

$$0,0006 \le a_{12} \le 0,0030$$

$$0,0004 \le a_{13} \le 0,0024$$

$$0,0004 \le a_{21} \le 0,0025$$

Как видно, в системы ограничений (4) и (5) добавились дополнительные ограничения на переменные элементы матрицы выигрышей. Отметим, что могут также присутствовать и иные ограничения, здесь же мы в целях наглядности рассматриваем наиболее простой их вариант.

В итоге получаются следующие результаты: $q_1 = 176,5$, $q_2 = 29,4$, $q_3 = 323,5$; $p_1 = 215,7$, $p_2 = 183,0$, $p_3 = 130,7$; $F_{max} = 1000,0$; $Z_{min} = 416,7$ При этом средний выигрыш составит: $V_1 = 0,001$ для игрока 1 и $V_2 = 0,0024$ для игрока 2.

В условиях матрицы с переменными выигрышами средние выигрыши игроков меняются, что обусловлено неопределенностью выигрышей. Важно иметь в виду, что при указанных ограничениях на элементы матрицы выигрышей (6) выигрыши игроков находятся в определенных выше пределах. Соответственно, доходность инвестора будет лежать в диапазоне от $0,0004$ до $0,0048$.

Таким образом, использование линейного программирования с переменными коэффициентами при решении игровых задач позволяет учитывать неопределенность реальных экономических показателей, что делает моделирование экономических ситуаций методами теории игр более приближенным к реальной практике.

Литература

1. Клитина Н.А. Формирование портфелей ценных бумаг для различных типов инвесторов // Финансовая аналитика: проблемы и решения. 2011. № 23. С. 9–14.

2. Лемешко Б.Ю. Теория игр и исследование операций: конспект лекций. Новосибирск, 2013. 167 с.

3. Мартынов А.П. Метод генерации столбцов в задаче линейного программирования с взаимозависимыми интервальными коэффициентами / Вычислительные технологии: сб. статей. Уфа, 1998. Т. 3. № 2. С. 39–44.

4. Мартынов А.П., Салимоненко Е.А., Ванчухина Л.И., Калашникова Л.А. Линейные модели с взаимозависимыми параметрами и их применение. Уфа: Государственное издательство научно-технической литературы «Реактив». 1998. 204 с.

5. Салимоненко Д.А., Салимоненко Е.А. К вопросу о выборе стратегии экономической организации // Вестник БашГУ. 2007. № 1. С. 15–18.

6. Сигал А.В. Моделирование процессов оптимального распределения ресурсов на основе решения антагонистических игр: специальность 08.00.13 «Математические и инструментальные методы экономики»: дисс. на соискание ученой степени д-ра экон. наук / науч. рук. А.В. Виноградов; Институт систем анализа. М., 2015. 321 с.